近似数量系统与数学能力的关系：一项元分析

程阳春[123] 黄瑾[1]
[1](华东师范大学教育学部,上海 200062);
[2]（中国基础教育质量监测协同创新中心华东师范大学分中心，上海 200062）
[3]（豫章师范学院学前教育学院，南昌 330103）

摘 要 在过去20年间，近似数量系统（ANS）与数学能力的关系是国际认知与心理研究的重要议题，但二者关系仍存在争议。为了揭示ANS与数学能力的关系和影响二者关系的调节机制，本研究采用随机效应模型，对来自40项研究、44个独立样本、8132名被试的153个效应值进行了元分析。结果发现，ANS与数学能力的相关达到了稳健的高相关。通过对分类变量的亚组分析和连续变量的元回归分析，发现二者的相关程度受到分类变量ANS测量指标、数学能力的内容和学段的调节；受到连续调节变量年龄和女性比的调节。通过功效分析，发现需要至少85个样本才能使相关研究达到足够的统计检验力。研究结果确定了ANS与数学能力的关系，为深入的因果推断研究和数学教育提供了实证依据和视角。

关键词 近似数量系统,数学能力,元分析
分类号 B844; G44

Association between approximate number system and mathematical competence: a meta-analysis

CHENG Yangchun[123], HUANG Jin[1]
[1] (Faculty of Education, East China Normal University, Shanghai, 200062, China)
[2] (Collaborative Innovation Center of Assessment towards Basic Education Quality, East China Normal University, Shanghai 200062, China)
[3] (Department of Preschool Education, Yuzhang Normal University, Nanchang 330103, China)

Abstract

Numerous researches have been dedicated to explore the association between the approximate number system (ANS) and mathematical competence in the past two decades. However, various contradictory results have been reported. It remains unclear whether and to what extent the relationship differs systematically between ANS and mathematical competence and whether category variables such as index, task format and task type of ANS, math content and academic stages, continuous variables such as female rates, age and sample size are additional moderators. We investigated these questions by means of a meta-analysis of cross-sectional studies.

The literature yielded 40 articles, 44 independent samples reporting 153 effect sizes found with 8132 participants. A random-effects model was selected to conduct the meta-analysis in Comprehensive Meta-analysis 3.3 software. The heterogeneity test showed that there was significant heterogeneity among 153 effect sizes, indicating that the random-effect model was adequate for

subsequent meta-analysis. Based on the results of the funnel plot, Egger's test of regression to the intercept and Classic Fail-safe N, no significant publication was found in the included studies.

The main effect analysis indicated a significant positive correlation between ANS and mathematical competence(r = 0.299) which was larger than other similar researches and reached high effect size according to new standard. The moderation analysis revealed that the link between ANS and mathematical competence was moderated by category variables including index of ANS, math content and academic stages, and continuous variables including female rates and age. Specially, with regard to the index of ANS, compared with w and RT, accuracy had the strongest correlation with math competency; with regard to age, compared with older students and adult, the relation between ANS and math competence was strongest among kindergarteners; with regard to math content, compared with other contents of mathematical competence, early math concept and overall mathematical competence showed strongest relationship with ANS.

However, other moderators such as task format and task type of ANS, and sample size did not moderate the relationship between these two constructs. In addition, 85 or more participants are needed to detect the effect with 80% power at an alpha level of 0.05, which means further research need a sample of more than 85 participates to detect the association between ANS and math competence . The study set the foundation for further experimental research to induce causal link between ANS and mathematical competence, and for further longitudinal research to reveal the dynamic relationship between ANS and mathematical competence among the spectrum of human life. Moreover, it also called for educational support for the disadvantaged from the perspective of ANS intervention and view of mathematical education which care more about fundamental mathematical competence.
Key words approximate number system(ANS), mathematical competence, meta-analysis

1 引言

数的运用与人类活动息息相关。在各种决策过程中，人们既运用基于复杂符号的各种算法，也运用简单的非符号的“数感”。非符号的“数感”，即近似数量系统(ANS，approximate number system)，是一种古老的认知能力。它广泛存在于各种动物和各种文化情境的人类之中(Ditz & Nieder, 2015; Nys et al., 2013; Piazza et al.,2013)。人类婴儿在未习得语言之前，已经能够感知事物的数量信息。随着语言的获得，人类学习和发展了更为复杂和抽象的数认知能力，即数学能力。ANS 与数学能力存在何种关系，是过去 20 年间，国际认知与心理研究的重要议题(Wilkey & Ansari,2020)。然而已有研究结论却存在矛盾之处，有的研究在控制了表达性语言能力、注意时间和记忆容量之后发现 ANS 能预测即时的数学能力，在控制了年龄、前测数学能力、表达性语言能力之后发现 ANS 能显著预测 6 个月之后的数学能力(Libertus et al., 2013)，而有的研究则发现二者相关并不显著(Fuhs & McNeil, 2013)。因此，ANS 与数学能力之间有无相关，相关程度如何，成为一个仍有待解决的问题。本研究采用元分析的方法，通过对二者总体相关性和潜在调节因素的检验，厘清二者的关

系，为深入的研究和数学教育提供更多的证据支持。

1.1 ANS 的概念和测量

ANS 是一种本能、快速、粗略地表征集合中数量的能力 (Bugden et al., 2021)。人类和其他动物都具备这种对非符号数量进行估计、比较和运算的能力，并在一生中不断发展变化(Fuhs & McNeil, 2013)。ANS 的测量一般有 2 种任务范式。一是点阵比较任务，即判断同时呈现或先后序列呈现两组相互隔离或混在一起的点阵的数量的多少与异同。二是点阵加法任务，即判断先后(加法)呈现的同色点阵与另一颜色点阵数量的多少与异同。ANS 的测量指标主要有韦伯分数(w)、整体正确率(overall accuracy)和反应时(RT，Reaction Time)。其他指标有数字距离效应（NDE，number distance effect）和混合指标，如 ER+RT，代表着整合了错误率(Error Rate，与正确率机制相同)和反应时(Lyons et al., 2014)。其中，整体正确率评估了被试在所有 ANS 任务中做对的百分比，反应时评估了被试作答的反应时长。关于近似数量系统的理论假设认为，近似数量系统遵循韦伯定律(Weber's law)(Odic et al,2013)，即两个数字的比率越大，判断反应时越短，正确率越高(Suárez-Pellicioni & Booth, 2018)。个体比较不同比例数量的正确率可以通过韦伯分数 w 的计算获得。

1.2 数学能力的概念和测量

广义的数学能力包括数概念、空间、几何、函数等内容，狭义的数学能力主要指数概念相关的内容。在 ANS 与数学能力关系的研究中，常见的数学能力内容为：(1)数学推理(math reasoning/applied problems)，在应用情境下解决数学问题；(2)心算(math fluency/mental calculation)，在尽可能少的时间完成尽可能多的数学算式；(3)数运算(calculation)，在自由时间内，采取任何方式解决非情境性的数学算式；(4)数概念(numeral concept)，整合了数学中数与量、数的关系和运算等方面的内容；(5)早期数概念(early numeral concept)，除了常见的数概念任务，还有学前阶段的非正式数学的内容(如数数)；(6)空间几何，主要指与空间方位、立体几何等相关内容；(7)综合，涵盖了代数、函数、空间几何等数学内容。常用数学能力测量工具为 TEMA-3(Test of Early Mathematics Ability-3，《早期儿童数学能力测试（第三版)》)(Ginsburg & Baroody, 2003)，使用频率次之的是 Woodcock Johnson Ⅲ(Woodcock et al., 1990)、《中国小学生基本数学能力测试量表》(吴汉荣 & 李丽, 2005)，部分研究使用了数学学业测验、还有一些研究采用自编工具的方式单独或组合测查了数数、运算、心算、数符号知识等。

1.3 ANS 与数学能力的关系

对于 ANS 与数学能力的关系，存在三种理论假设(Chen & Li, 2014; Starr et al., 2013)。较为普遍的理论假设认为，ANS 促进了数学学习能力的发展。支持这一假设的研究发现，4 岁的尚未接受正式数学教育的儿童，ANS 与数学能力存在高相关(Purpura & Logan, 2015)，婴儿期的 ANS 能够预测 3.5 岁时的数学能力(Starr et al., 2013)，对 ANS 进行教育干预能提升幼儿的数学能力(Park et al., 2016)。Chu 等人(2015)提出基数中介假说(Cardinal Knowledge Mediation Hypothesis)，支持了这一理论假设。该假说认为，ANS 支持了学前儿童的基数原则的学习，从而促进了学前儿童的数学学习。第二种假设认为，数学学习提升了 ANS 的水平。支持这一假设的研究发现，相比于未受学校教育的人，受学校教育的人在 ANS 任务上表现更优，且这一优势不受文化情境的影响，在西方(Nys et al., 2013)和非洲(Piazza et al.,2013; Pica et al.,2004)均如此。第三种假设则认为，ANS 与数学能力并无关系(Butterworth, 2010; Lyons et al,2012)。Butterworth 认为，ANS 遵循韦伯定律，以对数的方式表征数量，而加减运算等数学能力以线性的方式表征数量，二者本质上并无相关。Fuhs 和 McNeil (2013)提出抑制控制说(Inhibitory Control Hypothesis)，这一假说认为，抑制控制能力同时影响了学前儿童的 ANS 和数学能力，当加入抑制控制能力作为变量之后，ANS 与数学能力的关系不复显著。此外，Bugden 等人(2021)的研究发现，ANS 的教育干预并不能提升小学生的

数学能力。三种假设均一定程度上获得了实证研究的支持，统合不同研究的元分析，有利于揭示二者的稳定的总体关系和调节效应。

1.4 ANS 与数学能力关系的潜在调节变量

ANS 与数学能力关系可能受到 ANS 测量指标、ANS 任务的呈现方式、ANS 任务类型、数学能力类型和学段等分类调节变量，和年龄、女性比、样本量等连续调节变量的影响。

首先，对于 ANS 测量指标，研究发现，不同的 ANS 指标的相关性并没有足够高，说明它们可能代表了 ANS 的不同方面(Gilmore et al., 2011)。相应地，这些指标的信度不同，我们由此可以假设各指标与数学能力的关系存在差异性。对于 ANS 的任务范式，一方面，Price 等人(2012)采用了同时、序列、混合的方式等三种呈现方式，Passolunghi 等人(2014)采用了混合呈现和同时呈现等两种呈现方式呈现两组点阵，两项研究的结果并不一致，说明呈现方式可能对二者关系有调节作用。另一方面， Gilmore(2010)提出，相对于点阵比较任务，点阵加法任务不仅需要对数量进行识别与比较，还需要对数量进行加工和运算，由此点阵加法任务与数学课程和素养的关系更密切，更能预测儿童的数学能力。由此，ANS 与数学能力的关系可能受到 ANS 任务类型的影响。

其次，对于数学能力的测查内容，在对 ANS 与数学能力关系进行探索的研究中，数学能力的测查内容具有较大的差异性。来自认知神经科学的研究发现，不同的数学活动激活不同的脑区，如心算激活的是角回(Dehaene & Cohen, 1997; Delazer et al., 2005)，而数学推理激活的是前额叶(Prabhakaran et al., 2001)。相应地，不同的数学能力与 ANS 的关系可能具有差异性。

再次，对于学段和年龄，大量研究发现学前阶段的 ANS 与数学能力存在相关性(如 Gilmore et al., 2010)，而较少的研究发现了大学生和成人中 ANS 与数学能力的相关性(如 Wei, Yuan et al., 2012)，且对于不同学段的研究并没有达到完全的一致性。ANS 与数学能力的关系可能受到学段调节。此外，已有研究以学段或年龄段作为分类调节变量的方式考察了 ANS 与数学能力的关系，但进一步以连续变量即年龄考察二者的关系，可能拓展已有研究，发现深层的机制。Inglis 等人(2011)认为，数量比较是数学认知发展的起点，随着年龄的增长，环境发挥的作用越来越大，数量比较能力与数学能力的关系越来越弱。相反的观点(Libertus et al., 2013)则认为，数量比较能力为人们提供了数学学习中不可或缺的数感，数量比较能力对数学能力影响持续人的一生。可见，年龄可能影响 ANS 与数学能力的关系。

此外，对于性别，虽然已有研究并未报告 ANS 与数学能力的关系中的性别差异，但大量研究发现了数学能力上的性别差异(Else-Quest et al., 2010; Hyde et al., 1990)，且 ANS 与数学能力的关系研究中，性别的影响尚不明确。鉴于大多实证研究并未报告不同性别间 ANS 与数学能力相关度的效应值，但大多研究报告了男女人数，据此可以获得女性比，进而探讨相应的调节效应。因此，本研究将探索以女性比为调节变量，探索性别对 ANS 与数学能力的关系的影响。

最后，对于样本量，部分研究的样本量较少(如 Agrillo et al., 2013; Gilmore et al., 2010)，一定程度上可能影响研究结果的稳定性。且在统计分析中，功效分析是保障统计检验力的重要前提。而在 Chen 和 Li(2014)的元分析纳入的独立研究样本中，发现仅 3 个独立样本的样本量达到了合格的功效水平，一定程度上影响了该元分析的有效性。但该元分析并未将样本量作为调节变量进行检验。基于此，本研究试着探索样本量对 ANS 与数学能力的关系的影响。

值得注意的是，鉴于 ANS 与数学能力关系的重要性，国内较多综述性文章介绍了 ANS 与数学能力的关系，但此类文章并未整合效应值、样本量，也无法检验其中的调节变量，因而无法真正意义上统合已有研究(康丹 等, 2020; 梁笑 等, 2021; 刘文, 秦梦媛, 2019; 牛玉柏 等, 2016)。国际上，Chen 和 Li(2014)、Fazio(2014)等人通过元分析梳理 ANS 与数学

能力之间的关系，且受到了广泛地关注。但以上研究在独立样本量、效应值的选取的数量和计算方式、文献的时效性和分析路径等方面存在问题。此外，以上研究虽然考察了若干分类调节变量，但只分析了年龄的调节效应，并未分析其他调节变量的背后机制。

综上，本研究旨在通过元分析，从整体上分析 ANS 与数学能力的关系，首次检验和探讨不同潜在调节变量的作用，揭示影响二者关系的调节机制。本研究将系统检索各类数据库和学术搜索引擎，更新和完善已有研究文献的时效性和完整性，拓展和丰富效应值的提取，引入不同的潜在调节变量，为进一步的实验研究和因果推断奠定基础，也为相应的数学教育提供新的视角和实证依据。

2 研究方法

2.1 文献检索与筛选

2021 年 1 月~4 月，使用 ScienceDirect、EBSCO(含 ASP, BSP, PsycInfo, PsycArticle, ERIC, Ebooks 等)、Wiley Online Library、Web of Science、中国知网和万方等学术数据库,以及 Google Scholar 展开搜索，为了避免遗漏,对综述和相关文章的参考文献进行人工搜索。

检索词主要有近似数量系统和数学能力，其中，近似数量系统的中英文检索词为：近似数量系统、数量表征系统、approximate number system、ANS、approximate numerical ability、non-symbolic numerical magnitude、analog magnitudes、number acuity 和 number sense；数学能力的检索词为：math、mathematics、numeric、arithmetic 和 number。通过编辑检索式和运用布尔逻辑运算符连接等方式运用检索词进行文献检索。根据检索词进行一次检索,再对一次文献的参考文献进行文献回溯和二次检索,初步根据摘要筛选量化研究文献，共得到 87 篇外文文献和 8 篇中文文献。

使用 NoteExpress 导入文献并按如下标准进行筛选：(1)须为可获取横断数据的实证研究,排除无横断数据的干预研究、纵向研究、纯理论研究、文献综述类研究； (2)同时测量了近似数量系统和数学能力,并至少报告了一个测量工具与另一个测量工具之间的相关系数(r),或者能转化为 r 的统计量。 (3)样本为正常发展人群，不含(数学)学习困难或残障人群；(4)样本量大小明确。

最终纳入研究 40 项，独立样本 44 个，共含 153 个相关系数,其中期刊论文 39 项，学位论文 1 项。样本总量为 8132 人，最大样本量为 1556 人，最小样本量为 35 人。平均年龄从 3.33 岁到 24.1 岁。独立样本来源分布为北美 22 个，欧洲 13 个，中国 8 个，南美 1 个。文献筛选流程见图 1。

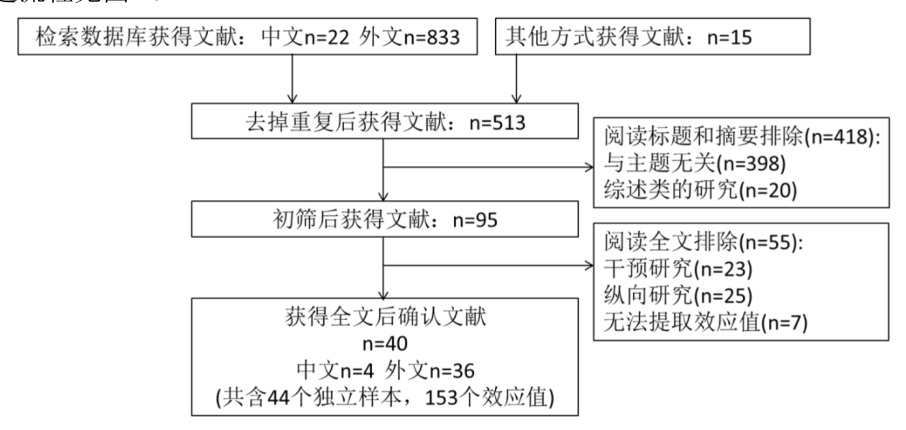


图 1 元分析文献筛选流程图

2.2 文献编码和数据处理

根据上文梳理、纳入文献的特点和本研究的关注点，本研究统计了平均年龄、女性比和样本量 3 个连续型调节变量。对 5 个分类调节变量进行编码(表 1)：将(1)ANS 测量指标编码

为 w(韦伯分数)、acc(正确率)、RT(反应时)、w+RT、ER+RT；(2)ANS 任务呈现方式编码为序列(序列呈现)、同时(同时呈现)、混合(混合呈现)；(3)ANS 的类型编码为比较(点阵比较任务)、加法(点阵加法任务)；(4)数学能力编码为数学推理、心算、运算、数概念、早期数概念、空间几何、综合；(5)被试的学段编码为 C(college，大学及成人)、A(Adolescents，中学)、P(Primary，小学)、K(Kindergarten，幼儿)。至此，完成了所有调节变量的编码。

对于效应值的编码，遵循以下原则：(1)效应值的提取以尽可能全面反映 ANS 与数学能力关系为准则；(2)为了整合不同测量指标的关系和整体的相关度，当相关的方向因韦伯分数导致的负相关，统一相关方向为相关；(3)若文献仅按被试特征(如年龄段)分别报告了相关,则分别编码；(4)若研究是纵向研究,则按首次测量结果和平行时间测量结果进行编码，两项测查的时间间隔在 2 个月及以内，且中途没有进行干预；(5)若同一研究同时测量了多个变量指标，则分别针对各个指标进行编码。对于相关系数的录入，若研究未报告相关系数，则根据一元线性回归分析的决定系数 R^2 和 β 值等进行换算获得效应值。本研究采用二人独立编码和同一编码者在不同时段编码的方式对所有编码文献进行编码,对存在疑问的地方进行讨论。对以上每种编码方式的最终结果比较发现,除了个别数据有偏差外,编码存在较高的一致性。具体见表 1。

表 1 纳入分析的的原始研究的基本资料

第一作者(年份)	国家地区	平均年龄	学段	样本量	女性比例	近似数量系统			相关系数	数学能力
						指标	呈现方式	类型		
Agrillo (2013)	意大利	24.1	C	35	0.71	w	序列	比较	0.49/0.50	数学推理/心算
Anobile (2013)	意大利	9.7	P	68	#	w	同时	比较	0.31	数概念
Bonny (2013)	美国	3–5	K	74	0.54	acc	同时	比较	0.39	早期数概念
Braham(2017)	美国	7.59	P	54	0.50	acc	#	比较	0.28/0.45/0.39	心算/运算/数学推理
Braham (2018)	美国	20.33	C	87	0.53	acc	混合	比较	0.27/0.01/0.27	心算/运算/数学推理
Castronovo (2012)	英国	19–37	C	66	0.68	w	序列	比较	0.13	心算
Fazio (2014)	美国	10.72	P	53	0.59	w/RT	同时	比较	0.60	综合
Fuhs (2013)	美国	4.6	K	86	0.50	acc	同时	比较	0.19	早期数概念
Gilmore(2010)(exp1)	美国	5.8	P	41	0.54	acc	序列	加法	0.59	综合
Gilmore(2010)(exp2)	美国	5.9	K	62	0.61	acc	序列	加法	0.38/0.39	综合/早期数概念
Gilmore (2013) (exp1)	英国	7.7	P/K	80	0.43	acc	同时	比较	0.57	运算
Gilmore (2013) (exp2)	英国	9.4	P	71	0.49	w	同时	比较	0.39	运算

Gimbert(2019)	法国	6.68	P/K	148	0.57	acc	同时	比较	0.21/0.34	数概念/早期数概念
Haist(2015)	美国	16.2	P/Y/C	44	0.45	acc /RT	同时	比较	0.31/0.24 等 40 个	心算/运算/数学推理/数概念
Jiménez(2017)	加拿大	3.33	K	62	0.45	acc	同时	比较	0.18/0.18/0.37	早期数概念
Jordan(2013)	美国	8.8	P	357	0.53	acc	同时	比较	0.19	心算/运算
Kolkman(2013)	荷兰	6.0	K	69	#	acc	同时	比较	0.16	(早期)数概念
Libertus(2011)	美国	4.3	K	122	0.49	acc /RT/w	同时	比较	0.42/0.26/0.28	早期数概念
Libertus(2012) (exp1)	美国	#	C	120	#	w	同时	比较	0.22	综合
Libertus(2012) (exp2)	美国	#	C	61	#	w	同时	比较	0.31	综合
Libertus(2013a) (exp1)	美国	4.2	K	200	0.49	acc/RT/w	同时	比较	0.44/0.28/0.26	早期数概念
Libertus(2013a) (exp2)	美国	4.8	K	165	0.48	acc/RT/w	同时	比较	0.52/0.36/0.42	早期数概念
Libertus(2013b)	美国	5.99	#	74	#	acc	同时	比较	0.44/0.06	早期数概念
Lonnemann (2011)	中国	8.8	P	35	0.51	NDE	同时	比较	0.04/0.01	运算
Lourenco (2012)	美国	17-21	C	65	#	Acc	同时	比较	0.32/0.33	数概念/空间几何
Lyons (2014)	荷兰	#	P	1391	0.52	ER+RT	同时	比较	0.55/0.28 等 7 个	心算
Negen(2015)	英国	4.25	K	46	0.46	acc	同时	比较	0.63	早期数概念
Odic(2016)	乌拉圭	7.26	P	244	0.55	acc	同时	比较	0.51/0.37/等 5 个	数概念
Passolungh (2014)	意大利	6.25	P	157	0.49	acc	同时/序列	比较/加法	0.20/0.20/0.14 等 9 个	数概念
Praet(2013)	比利时	5.7	K	63	0.48	acc	同时	比较	0.473	运算
Price(2012)	加拿大	22.29	C	36	0.58	w	混合/同时/序列	比较	0.24/0.10/0.28	心算
Purpura (2015)	美国	4.18	P	124	#	acc	同时	比较	0.64	早期数概念
Starr(2013)	美国	3.50	K	48	0.42	w	序列	比较	0.42	早期数概念
Toll (2015)	荷兰	7.1	P	671	0.50	acc	同时	比较	0.20/0.19/	数学推理/心算

van Marle (2014)	美国	4.33	K	138	0.54	w/acc	混合	比较	0.27 等 10 个	早期数概念
Wang (2020)	美国	4.5	K	80	#	acc	同时	比较	0.40	早期数概念
Wei (2012a)	中国	8–11	P	1556	0.48	acc /RT	同时	比较	0.39/0.08	心算
Wei (2012b)	中国	21.9	C	80	0.50	acc	混合	比较	0.26/0.18	运算/综合
Xenidou-Dervou (2013)	荷兰	5.59	K	444	0.45	acc	序列	比较/加法	0.26/0.26/0.25 /0.26	早期数概念
Zhang (2019)	中国	9.9	P	271	#	acc/RT	同时	比较	0.30/0.18	心算
孔海燕 (2017)	中国	10.22	P	63	#	acc	混合	比较	0.41/0.83	综合/空间几何
刘亚飞 (2019)	中国	10.85	P	93	0.43	w/acc	同时	比较	0.09/0.08 等 6 个	综合/空间几何/数概念
牛玉柏 (2016)	中国	4.92	K	122	0.49	w/acc	同时	比较	0.52/0.39 等 8 个	运算/早期数概念
张继英 (2019)	中国	5.68	K	206	0.47	w/acc	同时	比较	0.51/0.30	早期数概念

备注：#为未报告，同一位作者同一年有两份研究，用 a 和 b 区分。

在此基础上，本研究采用皮尔森相关系数 *r* 作为效应值指标。使用软件 Comprehensive Meta-Analysis Version3.3 (Borenstein et al, 2014)进行元分析主效应检验和调节效应检验，使用 R 语言的 pwr 软件包进行功效分析。此外，亚组分析时为了保证调节变量每个水平下的研究均能代表该水平，每个水平下的效应值个数应不少于 3 个(Song et al, 2014)。

3 结果

3.1 发表偏倚量检验

通过漏斗图(图 2)，可以看出该图是对称的，大部分研究集中在漏斗图的中上部，而且聚集在平均效应值的附近，说明本研究可能不存在发表偏倚。Egger 检验的结果也不显著，截距为 0.053，95% *CI* [-0.535, 0.641]，表明本研究不存在发表偏倚。进一步地失安全系数计算发现，本研究计算的 Classic 失安全系数 $N = 18948$($\alpha = 0.050$，$p = 0.00000$)，即需要额外纳入 18948 篇文献(效应值)，元分析的结论才能被推翻。进一步说明本研究不存在出版偏误。

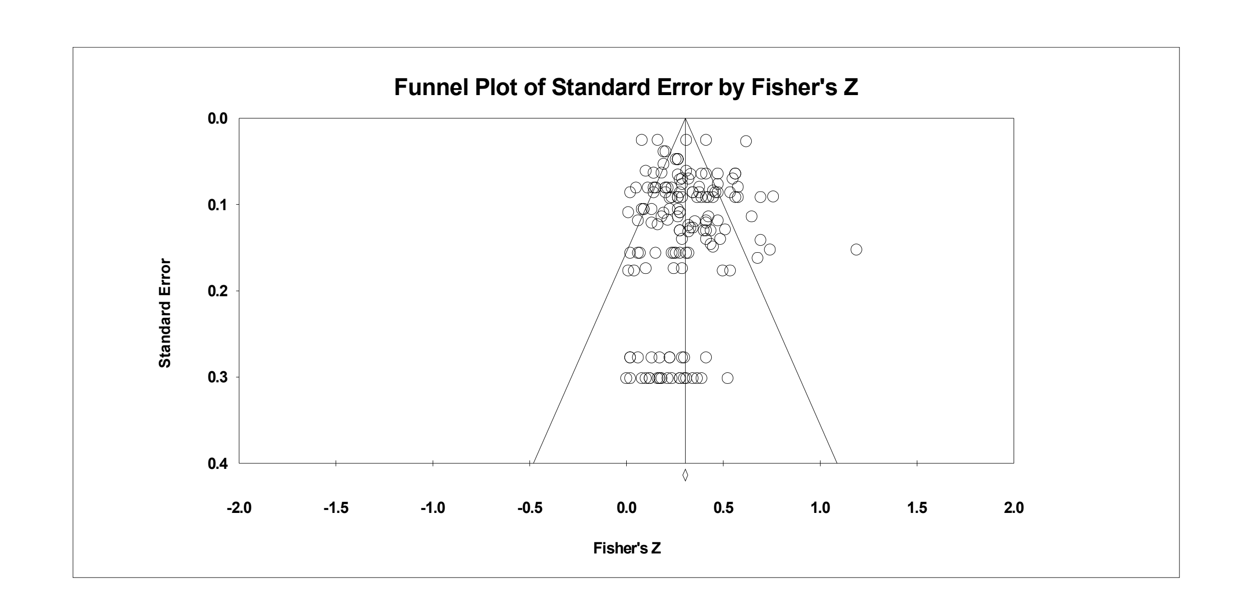


图 2 发表偏倚检验(漏斗图)

3.2 异质性分析

本研究对纳入的效应值进行异质性分析，以明确采用随机模型的合理性，并为调节效应的分析提供依据。检验结果发现(表 2)，Q 值为 657(p <0.001)，I^2 值为 76.85%，超过了 Huedo-Medina(2006)等提出的 75%的法则，说明研究存在异质性，近似数量系统与数学能力关系的效应值中有 76.85%的变异是由效应值的真实差异引起的，采用随机模型是恰当的。该结果也提示不同研究间的估计值的差异可能受到了一些研究特征因素的干扰，可进行调节效应分析。

3.3 主效应分析

采用随机效应模型对 153 个效应值进行估计,结果显示(表 2)，近似数量系统与数学能力相关的综合效应值为 0.299, 95%的置信区间为[0.270,0.326],不包含 0。根据 Gignac 和 Szodorai(2016)提出的最新判断标准,元分析的低、中、高相关系数的临界值为 0.11、0.19、0.29。近似数量系统与数学能力的综合效应值大于 0.29,表明二者存在稳健的高相关。

表 2 近似数量系统与数学能力的整体关系

效应模型	效应数 (k)	综合效应值 (r)	标准误	95%置信区间(CI)		异质性检验			
				下限	上限	Q	Df	p	I^2
随机模型	153	0.299	0.006	0.270	0.326	657	152	0.000	76.85%

3.4 调节效应分析

利用亚组分析和元回归分析检验调节变量对近似数量系统和数学能力的关系是否都有显著影响。亚组分析一般适用于调节变量为分类变量的情况，本研究中的此类变量为 ANS 测量指标、ANS 呈现方式、ANS 类型、数学能力内容和学段。元回归分析一般适用于调节变量为连续变量的时候，本研究中的此类变量为平均年龄、女性比例、样本量。亚组分析的基本信息见表 3。

表 3 分类变量的调节效应

调节变量	类别	k	异质性检验			r	95%CI	
			Q_B	Df	p		下限	上限
ANS 测量指标	Acc	94	30.214	5	0.000	0.326	0.293	0.358
	RT	23				0.185	0.124	0.245
	w	26				0.261	0.212	0.309
	NDE	2				0.025	－0.217	0.264
	ER＋RT	7				0.295	0.131	0.442
	w＋RT	1				0.600	0.394	0.749
ANS 呈现方式	混合	11	2.295	2	0.317	0.289	0.158	0.410
	同时	127				0.304	0.272	0.335
	序列	15				0.254	0.196	0.310
ANS 类型	比较	145	1.398	1	0.237	0.301	0.272	0.330
	加法	8				0.246	0.156	0.332
	自编	69				0.291	0.253	0.329
数学能力	空间几何	3	17.195	6	0.009	0.169	0.023	0.308
	数概念	37				0.251	0.196	0.305
	数学推理	11				0.269	0.165	0.368
	心算	29				0.254	0.182	0.324

	运算	22				0.284	0.209	0.356
	早期数概念	41				0.356	0.314	0.396
	综合	10				0.404	0.238	0.547
学段	大学	25	18.723	4	0.001	0.233	0.175	0.289
	中学	10				0.200	0.016	0.371
	小学	60				0.276	0.229	0.323
	幼儿园	44				0.363	0.323	0.401

由表 2 可知，ANS 任务呈现方式、ANS 任务的类型对研究效应值的异质性没有影响。而 ANS 的测量指标、数学能力的内容和学段则是造成各研究效应值存在差异的原因。

(1)就 ANS 测量指标而言($Q_B = 16.865$，$p = 0.001$)，Q 检验达到了显著性水平，说明 ANS 测量指标对 ANS 与数学能力关系的异质性起到了调节作用。当使用正确率作为指标时，ANS 与数学能力的相关效应值分别达到了 0.326，为高度相关效应值。韦伯分数次之($r = 0.261$)，接着为反应时($r = 0.185$)，二者均为中等相关效应值。此外，当混合指标(ER + RT)作为指标时，ANS 与数学能力的相关效应值为 0.295，达到了高度相关；而 NDE 和 w + RT 的效应值分别来自同一个研究，结果的采纳需谨慎。

(2)就 ANS 任务范式(ANS 呈现方式和 ANS 任务)而言，Q 检验均未达到显著性水平，说明 ANS 任务范式并未影响 ANS 与数学能力关系的异质性。

(3)就数学能力而言($Q_B = 16.865$，$p = 0.001$)，Q 检验达到了显著性水平，说明数学能力对 ANS 与数学能力关系的异质性起到了调节作用。当数学能力的内容为早期数概念和综合时，ANS 与数学能力的相关效应值均超过了 0.35，为高度相关效应值。当数学能力的内容为数概念、数学推理、心算、运算时，ANS 与数学能力的相关效应值均超过了 0.25，为中等相关效应值。当数学能力的内容为空间几何时，ANS 与数学能力的相关效应值为 0.169，为低相关效应值。

(4)就被试学段而言($Q_B = 18.723$，$p = 0.001$)，Q 检验达到了显著性水平，说明学段对 ANS 与数学能力关系的异质性起到了调节作用。当被试处于幼儿园阶段时，ANS 与数学能力的相关效应值达到 0.363，为高度相关效应值。小学其次、大学次之、中学最后，但相关效应值均超过了 0.19，为中度相关效应值。

表 4 连续变量对效应值的元回归分析

连续变量	回归系数	标准误	95%CI		z	p
			下限	上限		
截距	0.067	0．139	－0.205	0.340	0.49	0.627
平均年龄	－0.012	0.003	－0.017	-0.006	－4.26	0.000
女性比	0.731	0.273	0.196	1.266	2.68	0.007
样本量	－0.000	0.000	－0.000	0.000	－1.76	0.079

通过样本年龄、女性比和样本量对效应值的元回归分析(表 4)，发现元回归分析解释了 28%的 ANS 与数学能力关系的异质性。结果发现，样本量并不是造成元分析的异质性的原因；而样本年龄和女性比则对元分析的异质性造成了显著影响。其中，样本年龄与效应值的关系成负相关($p = 0.000$，$R^2 = 0.11$)，样本平均年龄越小，近似数量系统与数学能力的相关度越高(图 3)。女性比与效应值的关系成负相关($p = 0.027$，$R^2 = 0.08$)，女性比越高，近似数量系统与数学能力的相关度越高(图 4)。

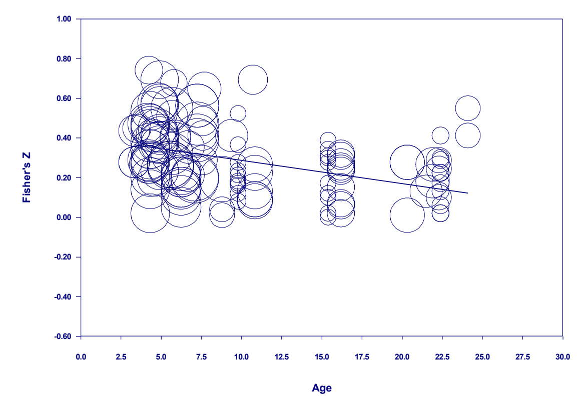


图 3　年龄比对效应值的回归散点图



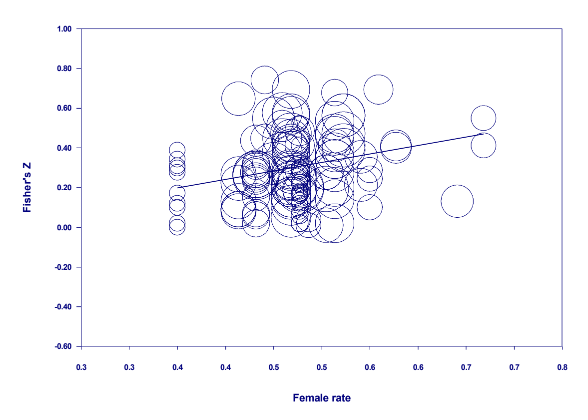


图 4　女性比对效应值的回归散点图

4 讨论

本研究运用元分析的方法，发现 ANS 与数学能力达到稳健的高相关，从而确定了二者之间的相关关系和调节效应，为揭示数学能力的差异性提供了依据，为进一步的因果关系的探讨和教育干预的支持贡献了实证证据。

4.1 ANS 与数学能力的关系

本研究对 40 篇文献、44 个独立研究样本、8132 个被试，153 个效应值进行元分析，从宏观上得出了 ANS 与数学能力之间存在稳定的高相关。该结果高于 Schneider 等人(2017)对非符号数量比较任务与数学能力关系的元分析和高于 Chen 和 Li(2014)、Fazio 等人(2014)对 ANS 与数学能力的关系的元分析的发现，后三者得出的 ANS 与数学能力关系的综合效应值均低于 0.25，为中等相关。这可能因为 Chen 和 Li(2014)的研究基于 47 个效应值，Fazio 等人(2014)的研究基于 34 个效应值，本研究则提取了 153 个效应值，效应值数量远远多于之前的研究。此外，效应值的提取方式、研究样本的数量、时效等也可能是造成不同结果的原因。在 Schneider 等人(2017)的元分析中，32%的非符号数量比较任务属于感数(subtizing)任务，并非 ANS 任务，且在数量比较任务(含符号数量比较任务)的测量指标中，正确率和韦伯分数为指标的效应值占 50%，而本研究中正确率与韦伯分数为指标的效应值占 78%。根据已有研究和本研究的发现，正确率和韦伯分数作为指标时，ANS 与数学能力的关系更为密切(Inglis & Gilmore, 2014)，这可能解释了 Schneider 等人的研究结果与本研究结果的存在差异的原因。但本研究与其他元分析的研究，都证实了 ANS 与数学能力之间，存在稳定的相关。从而验证了 ANS 促进数学能力或数学学习提升 ANS 的理论假设，一定程度上支持了基数

中介假说，并对抑制控制假说提出了挑战。实际上，越来越多的研究对抑制控制假说提出了质疑(梁笑 等, 2021)。例如，Peng 等人(2017)发现在控制了视觉注意和工作记忆后，抑制控制能力不对 ANS 或数学能力产生影响。

4.2 调节效应分析

虽然元分析得出了 ANS 与数学能力存在高相关，并不意味着对既有研究中未得出显著相关的研究的否定和推翻。ANS 与数学能力的关系，可能受到某些变量的调节或干扰，本研究通过检验，发现 ANS 的任务呈现方式、ANS 任务类型、样本量对各研究效应值的异质性没有影响。而 ANS 测量指标、数学能力的内容、学段和平均年龄、女性比则是造成各研究效应值存在差异的原因。

从 ANS 测量指标来看。本研究发现，ANS 指标对 ANS 与数学能力的关系的调节作用显著，这与 Schneider 等人(2017)、Chen 和 Li(2014)、Fazio 等人(2014)的研究发现是一致的。其中，在正确率、w 和反应时中，当 ANS 指标为正确率时，ANS 与数学能力的相关度最高，w 次之，RT 最弱，这与 Schneider 等人(2017)和 Fazio 等人(2014)的研究发现是一致的。这可能因为，正如 Inglis 和 Gilmore(2014)的研究所发现的，正确率和 w 存在高度的相关，二者都是测量 ANS 的指标。而 RT 相对来说与正确率和 w 的相关并不高，它可能并不是测量 ANS 的有效指标。且对重测信度而言，正确率的重测信度最高，w 的重测信度较低，而 RT 的重测信度极低，进而肯定了正确率在评估 ANS 敏锐度上的稳定性。另外，正确率与 w 的水平与比较情境中两组对象的数量的比例有关。这些发现一方面证明了正确率和 w 是更可靠的评估 ANS 的指标，另一方面则证明了 ANS 的任务并不完全遵循韦伯定律。

从数学能力的测查内容来看，虽然已有元分析并没有以数学能力为调节变量考察 ANS 与数学能力的关系，本研究进行了探索性地检验，发现数学能力的内容对 ANS 与数学能力的调节作用显著，当数学能力的测查内容是早期期数概念和综合时，ANS 与数学能力达到了高度相关。这可能因为早期数概念的测查多涉及非正式数学能力，因而与 ANS 的关系更为密切。有意思的是，“综合”这一数学能力包括了传统数概念之外的几何空间、数据分析与概率、测量、函数等数学能力，当数学能力测查内容为综合时，ANS 和数学能力的关系达到高度相关，可能意味着 ANS 与数学能力的几乎所有方面(几何空间除外)存在相关，证明了 ANS 与传统数概念和运算之外的数学能力的关系密切性(Gilmore et al., 2010; Libertus et al., 2013)。说明 ANS 可能是数学能力发展的重要基础。

从被试学段和年龄来看，一方面，对于学段，本研究发现，学段对 ANS 与数学能力关系的调节作用显著，这 Fazio 等人(2014)的研究是一致的，而与 Chen 和 Li(2014)的研究稍有不同，后者发现成人与儿童在 ANS 与数学能力的关系上并无显著区别。但 Chen 和 Li(2014)指出，成人的 ANS 与数学能力达到显著相关，这与本研究是一致的。这可能因为，ANS 虽然是一种古老的能力，具有一定的遗传性，但它也受到个体的发展、经验和环境的影响(Passolunghi et al., 2014)。因而，虽然儿童早期 ANS 对数学的影响更大，成年之后个体的 ANS 仍然对数学具有影响。其中，儿童早期 ANS 对数学能力的影响更大，一定程度上支持了基数中介假说，即 ANS 敏锐度促进学前儿童基数原则的发展，进而促进早期数学学习。另一方面，本研究首次运用元回归分析进行了探索性检验，结果发现，被试年龄与效应值的关系成负相关，被试平均年龄越小，近似数量系统与数学能力的相关度越高。这进一步印证了儿童早期的 ANS 与数学能力的关系更加紧密，而二者关系随年龄增长而变弱，可能因为随着年龄的增长，经验和社会因素对个人的数学能力产生了更大的影响(Inglis et al., 2011)。

从性别来看，本研究首次以女性比为调节变量，运用元回归分析进行了探索性检验。结果发现，女性比与效应值的关系成正相关，女性比越高，近似数量系统与数学能力的相关度越高。这可能因为本研究涉及的小学和幼儿园年龄段的样本较多，而这些阶段女性在数学

能力上有一定的优势(Wei, Lu et al., 2012; Fennema et al.,1998)。一定程度上说明相对于男性，女性可能更擅长将 ANS 运用于数学问题解决之中。但较小的决定系数，意味着该因素对异质性的解释力有限，可能说明总体而言性别对 ANS 与数学能力的关系的调节作用是微弱的。

值得注意的是，虽然样本量对总体效应值的元回归并不显著，但必要的样本量是量化研究的前提。使用 R 语言的 pwr 软件包，根据综合效应值($r = 0.299$)的功效分析显示，要达到显著性水平为 0.05 的水平，功效为 80%的相关研究，需要至少 85 个样本量。从这个角度看，本研究 43%的独立样本的样本量达到了统计检验力的，远远高于 Chen 和 Li(2014)的研究中仅有 8%的独立样本的样本量量达到了统计检验力，证明本研究纳入的文献具有更高的统计检验力，文献质量更高。

4.3 研究意义、不足与展望

本研究运用元分析从整体上探讨了 ANS 与数学能力的关系及其调节效应，为该主题的深入研究提供了证据支持。首先，本研究发现 ANS 与数学能力存在稳定的高相关，验证了二者关系颇为密切的理论假设，纠正了已有研究发现二者相关并不高的结果。这为支持弱势群体的数学教育干预提供的证据。因为，虽然 ANS 是人与动物与生俱来的，但它也在人的一生不断发展，鉴于 ANS 与数学能力的高相关，通过 ANS 的教育干预，提升 ANS 敏锐度，进而提升数学能力，可能是对弱势群体进行教育补偿或干预的有效措施。这也为重视基础数学能力在数学教育中的地位提供了新的视角和实证依据。因为，虽然更复杂的数学学习看似与基本的数量比较关系不大，元分析却发现二者的密切关系，可见基础数学能力的重要性。其次，本研究还发现了 ANS 的测量指标、数学能力的内容、学段和平均年龄和女性比能够一定程度上调节 ANS 与数学能力相关的强度，今后研究若要更精准地考察二者关系，可能需要纳入以上因素。同时，考察 ANS 与数学能力相关的研究需要达到 85 个以上的样本量，才能达到足够统计检验力的功效水平，这也是今后研究应该注意的。

本研究是对当前 ANS 与数学能力确切关系的相关研究的重要补充，但仍存在一些不足之处。首先，某些调节变量的不同类别的效应值个数差异较大，这可能会对结果产生一定的影响，未来待资料丰富后可进一步确认亚组分析结果的稳健性。其次，由于该主题的数学能力测查内容大多涉及数运算和数概念相关的内容，其他数学内容如几何空间、测量、分类等涉及较少或没有涉及，因而导致相关效应值较少或缺失，鉴于本研究初步发现 ANS 与数学综合能力的高相关，未来研究可拓展数学能力的维度。最后，本研究在分析时，为了保障研究的可解释性和数据的有效性，主要聚焦横断研究结果这一视角。但元分析得到的结果仅能表明 ANS 与数学能力的线性相关，不能作因果推断，未来还需展开更多更加严谨的干预研究、追踪研究和基于此的元分析，以揭示二者的动态变化规律和发挥二者对教育实践的意义。

5 结论

本研究采用元分析的方法发现：(1)从整体来看，ANS 与数学能力呈稳健的高相关，ANS 敏锐度越高，数学能力越强。(2)ANS 与数学能力的关系受到 ANS 指标、数学能力内容、学段和平均年龄的影响，即 ANS 为正确率、数学能力与早期数概念和综合、学段为幼儿园时，ANS 与数学能力的相关性更高；平均年龄越小，ANS 与数学能力的相关性越大。此外女性比对 ANS 与数学能力的关系也造成了一定的影响。(3)ANS 与数学能力的关系不受 ANS 任务范式和样本量的调节。(4)ANS 与数学能力的相关研究至少需要 85 个样本量才具有足够的统计检验力。

参考文献

*元分析用到的参考文献

*Agrillo, C., Piffer, L., & Adriano, A. (2013). Individual differences in non-symbolic numerical abilities predict mathematical achievements but contradict ATOM. *Behavioral and brain functions*, *9*(1), 26. doi: 10.1186/1744-9081-9-26

*Anobile, G., Stievano, P., & Burr, D. C. (2013). Visual sustained attention and numerosity sensitivity correlate with math achievement in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*(2), 380–391. doi: 10.1016/j.jecp.2013.06.006

*Bonny, J. W., & Lourenco, S. F. (2013). The approximate number system and its relation to early math achievement: Evidence from the preschool years. *Journal of experimental child psychology*, *114*(3), 375–388. doi: 10.1016/j.jecp.2012.09.015

Borenstein, M., Hedges, L. V., Higgins, J. P., & Rothstein, H. R. (2014). *Comprehensive meta-analysis (version 3.3) [computer software]*. Englewood, NJ: Biostat.

*Braham, E. J., & Libertus, M. E. (2017). Intergenerational associations in numerical approximation and mathematical abilities. *Developmental Science*, *20*(5), e12436. doi: 10.1111/desc.12436

*Braham, E. J., & Libertus, M. E. (2018). When approximate number acuity predicts math performance: The moderating role of math anxiety. *PloS one*, *13*(5), e195696. doi: 10.1371/journal.pone.0195696

Bugden, S., Szkudlarek, E., & Brannon, E. M. (2021). Approximate arithmetic training does not improve symbolic math in third and fourth grade children. *Trends in Neuroscience and Education*, 22, 100149. http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tine.2021.100149

Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia.*Trends in Cognitive Sciences*, *14*(12), 534–541.

*Castronovo, J., Göbel, S. M., & Valdes-Sosa, P. A. (2012). Impact of high mathematics education on the number sense. *PloS one*, *7*(4), e33832. doi: 10.1371/journal.pone.0033832

Chen, Q., & Li, J. (2014). Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance: A meta-analysis. *Acta Psychologica*, *148*, 163–172. http://doi.org/10.1016/j.actpsy.2014.01.016

Chu, F. W., Vanmarle, K., & Geary, D. C. (2015). Early numerical foundations of young children's mathematical development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *132*, 205–212.

Dehaene S, Cohen L (1997) Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, *33*(2):219–250.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*, 1–42.

Delazer, M., Ischebeck, A., Domahs, F., Zamarian, L., Koppelstaetter, F., Siedentopf, C. M., Kaufmann, L., Benke, T., & Felber, S. (2005). Learning by strategies and learning by drill—evidence from an fMRI study. *Neuroimage*, *25*(3), 838–849. http://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2004.12.009

Ditz, H. M., & Nieder, A. (2015). Neurons selective to the number of visual items in the corvid songbird endbrain. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *112*(25), 7827–7832. https://doi.org/10.1073/pnas.1504245112

Else-Quest, N. M., Hyde, J. S., & Linn, M. C. (2010). Cross-national patterns of gender differences in mathematics: a meta-analysis. *Psychological bulletin*, *136*(1), 103–127. https://doi.org/10.1037/a0018053

*Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2014). Relations of

different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *123*, 53–72. doi: 10.1016/j.jecp.2014.01.013

Fennema, E., Carpenter, T., Jacobs, V., Franke, M., & Levi, L. (1998).A longitudinal study of gender differences in young children's mathematical thinking. *Educational Researcher*, *27*, 6–11.

*Fuhs, M. W., & McNeil, N. M. (2013). ANS acuity and mathematics ability in preschoolers from low-income homes: contributions of inhibitory control. *Developmental Science*, *16*(1), 136–148. doi: 10.1111/desc.12013

Gignac, G. E., & Szodorai, E. T. (2016). Effect size guidelines for individual differences researchers. *Personality and Individual Differences*, *102*, 74–78. doi: 10.1016/j.paid.2016.06.069

*Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, *115*(3), 394–406. doi: 10.1016/j.cognition.2010.02.002

Gilmore, C., Attridge, N., & Inglis, M. (2011). Measuring the approximate number system. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *64* (11), 2099–2109. doi:10.1080/17470218.2011.574710

*Gilmore, C., Attridge, N., Clayton, S., Cragg, L., Johnson, S., Marlow, N.,... Chambers, C. (2013). Individual differences in inhibitory control, not non-verbal number acuity, correlate with mathematics achievement. *PloS one*, *8*(6), e67374. doi: 10.1371/journal.pone.0067374

*Gimbert, F., Camos, V., Gentaz, E., & Mazens, K. (2019). What predicts mathematics achievement? Developmental change in 5- and 7-year-old children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *178*, 104-120. http://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.09.013

Ginsburg, H. P ., & Baroody, A. J. (2003). *Test of EarlyMathematics Ability* (3rd ed). Austin, TX: Pro-Ed.

*Haist, F., Wazny, J. H., Toomarian, E., & Adamo, M. (2015). Development of brain systems for nonsymbolic numerosity and the relationship to formal math academic achievement. *Human Brain Mapping*, *36*(2), 804–826. doi: 10.1002/hbm.22666

Huedo-Medina, T. B., Sánchez-Meca, J., Marín-Martínez, F., & Botella, J. (2006). Assessing heterogeneity in meta- analysis: *Q* statistic or I^2 index? *Psychological Methods*, *11*(2), 193–206.

Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: a meta-analysis. *Psychological bulletin*, *107*(2), 139–155. https://doi.org/10.1037/0033-2909.107.2.139.

Inglis, M., & Gilmore, C. (2014). Indexing the approximate number system. *Acta Psychologica*, *145*, 147–155. doi: 10.1016/j.actpsy.2013.11.009

Inglis, M., Attridge, N., Batchelor, S., & Gilmore, C. (2011). Non-verbal number acuity correlates with symbolic mathematics achievement: But only in children. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18*(6), 1222–1229

*Jiménez Lira, C., Carver, M., Douglas, H., & LeFevre, J. (2017). The integration of symbolic and non-symbolic representations of exact quantity in preschool children. *Cognition*, *166*, 382–397. doi: 10.1016/j.cognition.2017.05.033

*Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R.,... Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*(1), 45 - 58. doi: 10.1016/j.jecp.2013.02.001
[康丹, 张利, 蔡术, 刘江萍, 陆梅怡, & 刘秋香. (2020). 儿童近似数量系统精确性与数学能力的关系研究. *数学教育学报*, *29*(3), 19 - 24, 31.]
*Kolkman, M. E., Kroesbergen, E. H., & Leseman, P. P. M. (2013). Early numerical development and the role of non-symbolic and symbolic skills. *Learning and Instruction*, *25*, 95 - 103. doi: 10.1016/j.learninstruc.2012.12.001
[*孔海燕, 孙雨, & 宋广文. (2017). 小学生近似数量表征系统和工作记忆与数学成绩的关系. *数学教育学报*, *26*(02), 14-18.]
*Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. Developmental Science, *14*(6), 1292 - 1300. doi: 10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x
*Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Is approximate number precision a stable predictor of math ability? *Learning and Individual Differences*, *25*, 126 - 133. doi: 10.1016/j.lindif.2013.02.001
*Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Numerical approximation abilities correlate with and predict informal but not formal mathematics abilities. Journal of experimental child psychology, *116*(4), 829 - 838. doi: 10.1016/j.jecp.2013.08.003
*Libertus, M. E., Odic, D., & Halberda, J. (2012). Intuitive sense of number correlates with math scores on college-entrance examination. Acta Psychologica, *141*(3), 373 - 379. doi: 10.1016/j.actpsy.2012.09.009
[刘文, & 秦梦媛. (2019). 近似数量系统敏锐度与符号数学能力的关系、训练研究及展望. *辽宁师范大学学报(社会科学版)*, *42*(01), 40-47.]
[*刘亚飞, 原梦, & 李振兴. (2019). 小学生数感与数学能力的关系. *江苏第二师范学院学报*, *35*(05), 77 - 83.]
[梁笑, 康静梅, & 王丽娟. (2021). 个体近似数量系统与其数学能力之间的关系：发展研究的证据. *心理科学进展*, *29*(05), 827 - 837.]
*Lonnemann, J., Linkersdörfer, J., Hasselhorn, M., & Lindberg, S. (2011). Symbolic and non-symbolic distance effects in children and their connection with arithmetic skills. Journal of Neurolinguistics, *24*(5), 583 - 591. doi: 10.1016/j.jneuroling.2011.02.004
*Lourenco, S. F., Bonny, J. W., Fernandez, E. P., & Rao, S. (2012). Nonsymbolic number and cumulative area representations contribute shared and unique variance to symbolic math competence. *Proceedings of the National Academy of Sciences - PNAS*, *109*(46), 18737 - 18742. https://doi.org/10.1073/pnas.1207212109
*Lyons, I. M., Price, G. R., Vaessen, A., Blomert, L., & Ansari, D. (2014). Numerical predictors of arithmetic success in grades 1-6. *Developmental Science*, *17*(5), 714 - 726. doi: 10.1111/desc.12152
*Negen, J., & Sarnecka, B. W. (2015). Is there really a link between exact-number knowledge and approximate number system acuity in young children? *British Journal of Developmental Psychology*, *33*(1), 92 - 105. doi: 10.1111/bjdp.12071
[*牛玉柏, 时冉冉, & 曹贤才. (2016). 学前儿童近似数量系统敏锐度与符号数学能力的关系. *心理发展与教育*, *32*(02), 129-138.]
Nys, J., Ventura, P., Fernandes, T., Querido, L., & Leybaert, J. (2013). Does math education

modify the approximate number system? A comparison of schooled and unschooled adults. *Trends in Neuroscience and Education*, *2*(1), 13 - 22

Odic, D., Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Developmental change in the acuity of approximate number and area representations. *Developmental Psychology*, *49*(6), 1103 - 1112. doi: 10.1037/a0029472

* Odic, D., Lisboa, J. V., Eisinger, R., Olivera, M. G., Maiche, A., & Halberda, J. (2016). Approximate number and approximate time discrimination each correlate with school math abilities in young children. *Acta psychologica*, *163*, 17 - 26. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2015.10.010

Park, J., Bermudez, V., Roberts, R. C., & Brannon, E. M. (2016). Non-symbolic approximate arithmetic training improves math performance in preschoolers. *Journal of experimental child psychology*, *152*, 278-293. http://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.07.011

*Passolunghi, M. C., Cargnelutti, E., & Pastore, M. (2014). The contribution of general cognitive abilities and approximate number system to early mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, *84*(4), 631 - 649. doi: 10.1111/bjep.12054

Peng, P., Yang, X., & Meng, X. (2017). The relation between approximate number system and early arithmetic: The mediation role of numerical knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology*, *157*, 111 - 124.

Piazza, M., Pica, P., Izard, V., Spelke, E. S., & Dehaene, S. (2013). Education enhances the acuity of the nonverbal approximate number system. *Psychological Science*, *24*(6), 1037 - 1043

Pica, P., Lemer, C., Izard, V., & Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group. *Science (New York, N.Y.)*, *306*(5695), 499 - 503. https://doi.org/10.1126/science.1102085

Prabhakaran, V., Rypma, B., & Gabrieli, J. D. (2001). Neural substrates of mathematical reasoning: a functional magnetic resonance imaging study of neocortical activation during performance of the necessary arithmetic operations test. Neuropsychology, *15*(1), 115 - 127. https://doi.org/10.1037//0894-4105.15.1.115

*Praet, M., Titeca, D., Ceulemans, A., & Desoete, A. (2013). Language in the prediction of arithmetics in kindergarten and grade 1. *Learning and Individual Differences*, *27*, 90 - 96. doi: 10.1016/j.lindif.2013.07.003

*Price, G. R., Palmer, D., Battista, C., & Ansari, D. (2012). Nonsymbolic numerical magnitude comparison: Reliability and validity of different task variants and outcome measures, and their relationship to arithmetic achievement in adults. *Acta Psychologica*, *140*(1), 50 - 57. doi: 10.1016/j.actpsy.2012.02.008

*Purpura, D. J., & Logan, J. A. R. (2015). The nonlinear relations of the approximate number system and mathematical language to early mathematics development. *Developmental Psychology*, *51*(12), 1717 - 1724. doi: 10.1037/dev0000055

Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Susan Schmidt, S., Stricker, J., & De Smedt, B. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: a meta-analysis. *Developmental science*, *20*(3), 10.1111/desc.12372. https://doi.org/10.1111/desc.12372

Song, H., Zmyslinski - Seelig, A., Kim, J., Drent, A., Victor, A., Omori, K., & Allen, M. (2014). Does Facebook make you lonely? A meta - analysis. *Computers in Human Behavior*, *36*,

446 - 452.

*Starr, A., Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *110*(45), 18116 - 18120.

Suárez-Pellicioni, M., & Booth, J. R. (2018). Fluency in symbolic arithmetic refines the approximate number system in parietal cortex. *Human Brain Mapping*, *39*(10), 3956 - 3971. doi: 0.1002/hbm.24223

*Toll, S. W. M., Van Viersen, S., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2015). The development of (non-)symbolic comparison skills throughout kindergarten and their relations with basic mathematical skills. *Learning and Individual Differences*, *38*, 10 - 17. doi: 10.1016/j.lindif.2014.12.006

*van Marle, K., Chu, F. W., i, Y., & Geary, D. C. (2014). Acuity of the approximate number system and preschoolers' quantitative development. *Developmental Science*, *17*(4), 492 - 505. doi: 10.1111/desc.12143

* Wang, J., Halberda, J., & Feigenson, L. (2020). Emergence of the Link Between the Approximate Number System and Symbolic Math Ability. *Child development*, *92*(2), e186 - e200. doi.org/10.1111/cdev.13454

*Wei, W., Lu, H., Zhao, H., Chen, C., Dong, Q., & Zhou, X. (2012). Gender Differences in Children's Arithmetic Performance Are Accounted for by Gender Differences in Language Abilities. *Psychological Science*, *23*(3), 320 - 330. https://doi.org/10.1177/0956797611427168

*Wei, W., Yuan, H., Chen, C., & Zhou, X. (2012). Cognitive correlates of performance in advanced mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, *82*(1), 157 - 181. doi: 10.1111/j.2044-8279.2011.02049.x

Wilkey, E. D., & Ansari, D. (2020). Challenging the neurobiological link between number sense and symbolic numerical abilities. *Annals of the New York Academy of Sciences, 1464*(1), 7 - 98. doi: 10.1111/nyas.14225

Woodcock, R. W., Johnson, M. B., & Mat her, N. (1990). *Woodcock-Johnson psycho-educational battery — Revised.* DLM Teaching Resources.

[*吴汉荣,李丽.(2005).小学生数学能力测试量表的编制及信效度检验.*中国公共卫生*, *21*(4) , 473 - 475.]

*Xenidou-Dervou, I., De Smedt, B., van der Schoot, M., & van Lieshout, E. C. D. M. (2013). Individual differences in kindergarten math achievement: The integrative roles of approximation skills and working memory. *Learning and Individual Differences*, *28*, 119 - 129. doi: 10.1016/j.lindif.2013.09.012

[*张继英.(2019).5~6 岁儿童近似数量系统精确性和数学能力关系的研究(硕士毕业论文).*华东师范大学*, 上海.]

*Zhang, Y., Liu, T., Chen, C., & Zhou, X. (2019). Visual form perception supports approximate number system acuity and arithmetic fluency. *Learning and individual differences*, *71*, 1 - 12. doi: 10.1016/j.lindif.2019.02.008

（通讯作者：黄瑾 E-mail: jhuang@pese.ecnu.edu.cn）

作者贡献声明：

黄瑾：提出研究思路，论文最终版本修订；

程阳春：设计研究方案，采集、清洗和分析数据、论文起草。